

Wytrzymałość Materiałów

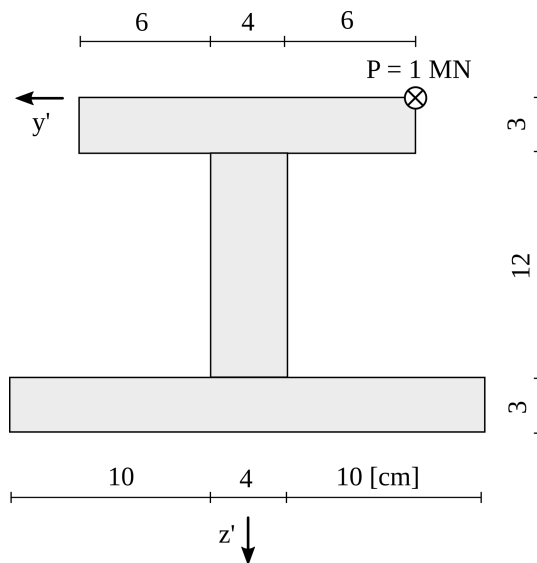
Paweł Bielski

6 lutego 2020

Ściskanie / rozciąganie mimośrodowe

Treść zadania

Dany jest przekrój dwuteowy o geometrii jak na rysunku. Przekrój jest obciążony siłą ścisającą działającą w oznaczonym punkcie z wartością 1 MN. Wyznacz sumaryczny wykres naprężeń normalnych od zginania i ściskania.



Rysunek 1: Przekrój poprzeczny obciążony siłą ścisającą

Określenie głównych centralnych osi bezwładności

Przekrój ma oś symetrii, więc wiadomo, że oś pionowa będzie osią główną. Położenie drugiej osi głównej wyznaczamy poprzez określenie środka ciężkości przekroju. Liczymy pole powierzchni przekroju:

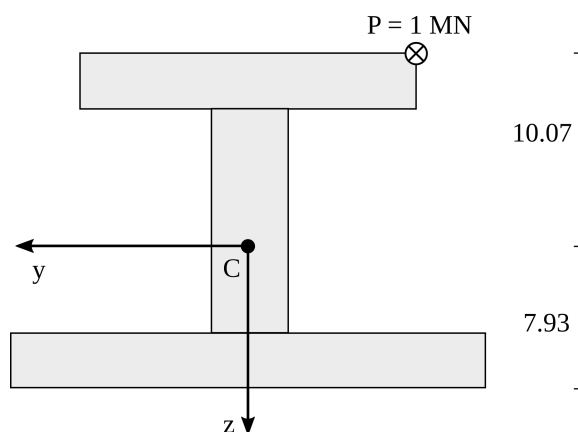
$$A = \sum A_i = 16 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 24 \cdot 3 = 168 \text{ cm}^2$$

Następnie obliczamy moment statyczny figury względem roboczej osi y' (bo to położenia osi y poszukujemy):

$$S'_y = \sum S_{y'i} = \sum A_i z'_{ci} = 48 \cdot 1.5 + 48 \cdot 9 + 72 \cdot 16.5 = 1692 \text{ cm}^3$$

Współrzędną środka ciężkości figury na osi roboczej z' uzyskujemy z relacji:

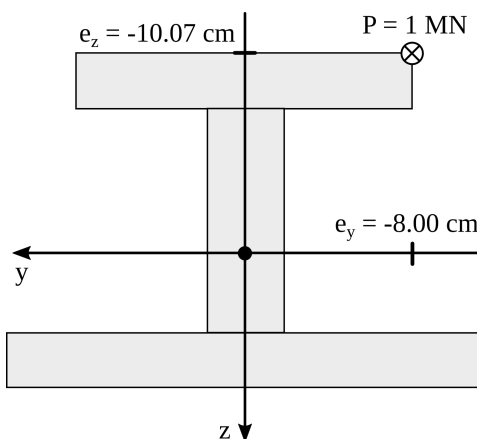
$$z'_c = \frac{S'_y}{A} = \frac{1692}{168} = 10.07 \text{ cm}$$



Rysunek 2: Położenie głównych centralnych osi bezwładności przekroju

Przyjęcie obciążeń

Do obliczenia momentów zginających wynikających z odsunięcia siły P od środka ciężkości przekroju potrzebujemy mimośrodów, czyli współrzędnych punktu przyłożenia tej siły w głównym centralnym układzie współrzędnych.



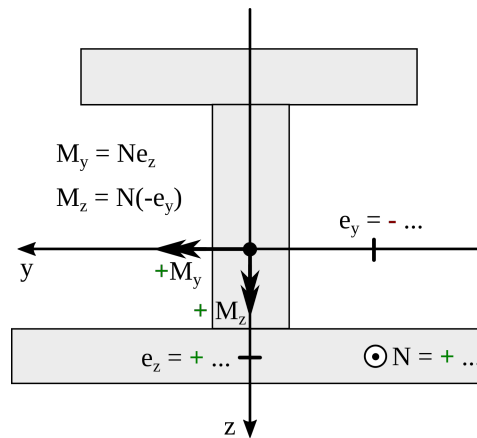
Rysunek 3: Mimośrody e_y i e_z działania siły P

Momenty zginające względem osi głównych wyznaczamy z wzorów:

$$M_y = Ne_z$$

$$M_z = N(-e_y)$$

gdzie N oznacza wartość siły normalnej (z odpowiednim znakiem). Minus w drugim wzorze wynika z ogólnie przyjętej konwencji znaków. Jego genezę można wyjaśnić w następujący sposób. Gdzie musiałaby znajdować się siła rozciągająca (normalna dodatnia), aby wywołać dodatnie momenty zginające względem obu osi głównych? Odpowiedź: tak jak na rysunku poniżej, czyli na dodatniej części osi z i na ujemnej części osi y . Aby oba iloczyny były dodatnie, trzeba ujemną współrzędną e_y przemnożyć przez -1 .



Rysunek 4: Wyjaśnienie pochodzenia minusa we wzorze na M_z

W naszym przypadku siła P jest ściskająca, a więc siła normalna jest ujemna i wynosi $N = -1000$ kN. Wobec tego momenty względem osi głównych wynoszą:

$$M_y = Ne_z = (-1000 \text{ kN}) \cdot (-10.07 \text{ cm}) = 10\,070 \text{ kNcm}$$

$$M_z = N(-e_y) = (-1000) \cdot [-(-8.0)] = -8000 \text{ kNcm}$$

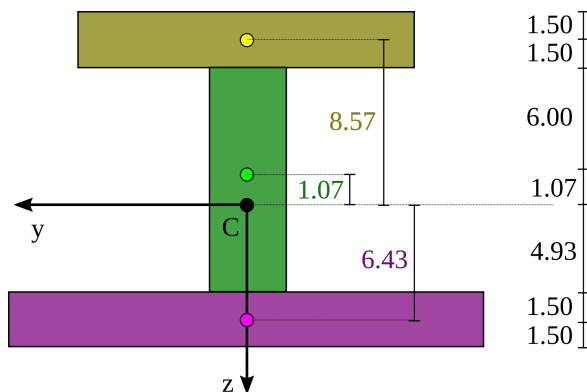
Mamy zginanie względem obu osi głównych, więc naprężenia normalne przyjmują postać trzyskładnikową. Na ich wartość ma wpływ siła normalna oraz momenty zginające względem obu osi.

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} (-y)$$

Minus przy współrzędnej y w tym wzorze pojawia się z tej samej przyczyny, co minus przy określaniu mimośrodów e_y .

Obliczenie wymaganych momentów bezwładności przekroju

Do wyznaczenia funkcji naprężeń normalnych niezbędne jest obliczenie moment bezwładności przekroju względem osi zginania.



Rysunek 5: Rysunek pomocniczy przedstawiający położenie środków ciężkości składowych figur w układzie osi głównych centralnych

$$I_y = 48 \cdot (-8.57)^2 + \frac{16 \cdot 3^3}{12} 48 \cdot (-1.07)^2 + \frac{4 \cdot 12^3}{12} + 72 \cdot 6.43^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{12} =$$

$$= 2561 + 631 + 3031 = 7223 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{3 \cdot 16^3}{12} + \frac{12 \cdot 4^3}{12} + \frac{3 \cdot 24^3}{12} = 1024 + 64 + 3456 = 4544 \text{ cm}^4$$

Wyznaczenie wykresów naprężeń normalnych

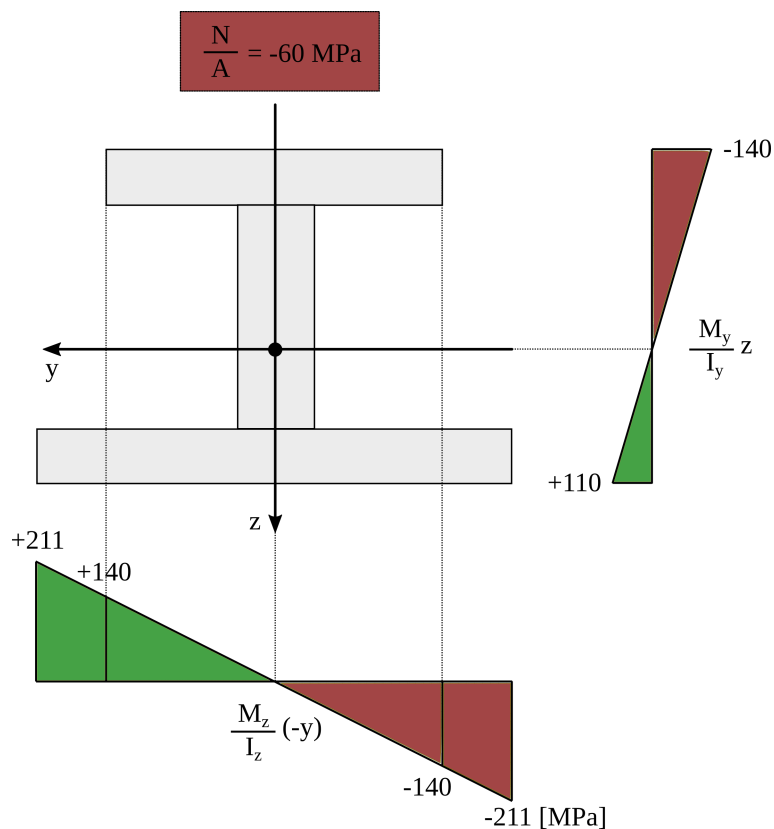
Ogólna funkcja naprężeń może być wyznaczona poprzez podstawienie wartości obciążeń (siły normalnej i momentów zginających) oraz charakterystyk geometrycznych (pola przekroju i momentów bezwładności). Otrzymana funkcja jest funkcją dwóch zmiennych y, z .

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} (-y) =$$

$$= \frac{-1000 \text{ kN}}{168 \text{ cm}^2} + \frac{10\,070 \text{ kNcm}}{7223 \text{ cm}^4} z + \frac{-8000 \text{ kNcm}}{4544 \text{ cm}^4} (-y) =$$

$$= -5.952 + 1.393z + 1.761y$$

Każdy z 3 składników naprężeń normalnych może być potraktowany odrębnie i przedstawiony na osobnym wykresie (człon od siły normalnej jako pojedyncza wartość).



Rysunek 6: Osobne wykresy naprężeń normalnych od zginania w dwóch kierunkach oraz wartość naprężeń normalnych od działania siły normalnej

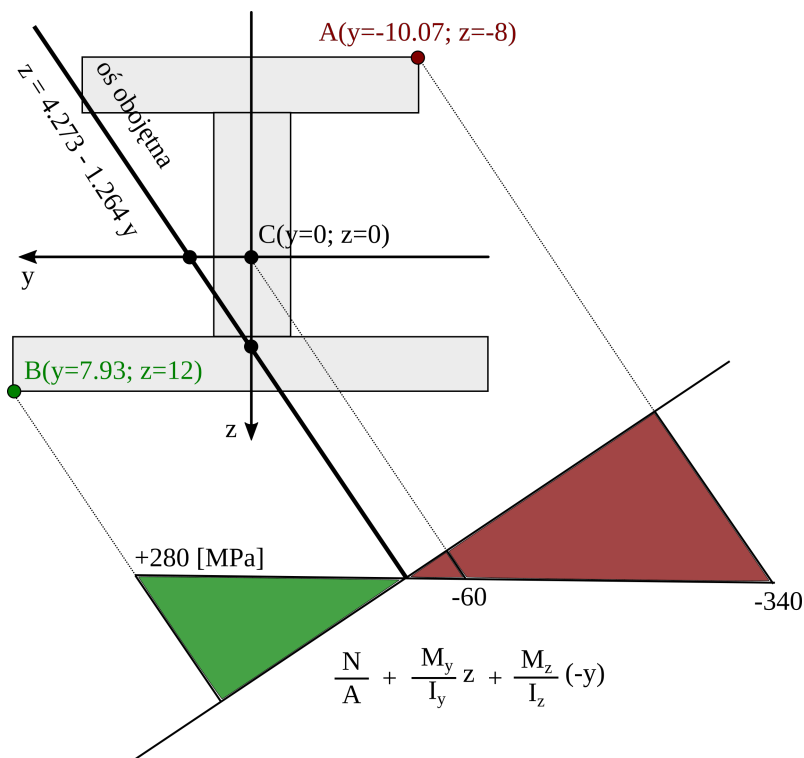
Naprężenia mogą być przedstawione na jednym wykresie po określeniu **osi obojętnej**, czyli takiej prostej, wzdłuż której wartość naprężeń normalnych wynosi zero.

$$\begin{aligned}\sigma(y, z) &= 0 \\ -5.952 + 1.393z + 1.761y &= 0 \\ z &= \frac{5.952 - 1.761y}{1.393} = 4.273 - 1.264y\end{aligned}$$

Można z łatwością znaleźć punkty przecięcia się prostej z osiami głównego centralnego układu współrzędnych.

$$\begin{aligned}y = 0 &\longrightarrow z = 4.27 \text{ cm} \\ z = 0 &\longrightarrow y = \frac{4.273}{1.264} = 3.38 \text{ cm}\end{aligned}$$

Po naniesieniu osi obojętnej na rysunek przekroju poprzecznego można przystąpić do rysowania wykresu sumarycznych naprężeń normalnych. Określamy położenie punktów najbardziej oddalonych od osi obojętnej - to w nich występować będą ekstremalne naprężenia normalne. Następnie rysujemy wykres wzdłuż prostej prostopadłej do osi obojętnej.



Rysunek 7: Sumaryczny wykres naprężeń normalnych od ściskania i zginania w obu kierunkach

Wartości ekstremalne naprężeń normalnych można obliczyć poprzez podstawienie do funkcji naprężeń $\sigma(y, z)$ współrzędnych najbardziej oddalonych punktów. W naszym przypadku są to punkty A i B. Warto zauważyć, że w punkcie C (środek ciężkości) naprężenia nie wynoszą 0! Występuje tam składnik naprężeń pochodzący od siły normalnej N/A .

$$\begin{aligned}\sigma_A(y = -10.07; z = -8.0) &= -5.952 + 1.393 \cdot (-8.0) + 1.761 \cdot (-10.07) = \\ &= -34 \text{ kN/cm}^2 = -340 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_B(y = 7.93; z = 12.0) = -5.952 + 1.393 \cdot 12.0 + 1.761 \cdot 7.93 = 280 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C(y = 0; z = 0) = -5.952 + 1.393 \cdot 0 + 1.761 \cdot 0 = -60 \text{ MPa}$$

Związki konstytutywne

Ogólny stan przestrzenny

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Płaski stan naprężenia

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ & \varepsilon_y & 0 \\ & & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases}$$

Płaski stan odkształcenia

$$\varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ & \varepsilon_y & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

Reszta bez zmian jak w PSN.

Naprężenia i odkształcenia pod dowolnym kątem w stanie płaskim

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_x \cos^2 \phi + \varepsilon_y \sin^2 \phi + \gamma_{xy} \cos \phi \sin \phi$$

$$\sigma_\phi = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi + 2\tau_{xy} \cos \phi \sin \phi$$

$$\tau_\phi = (\sigma_y - \sigma_x) \cos \phi \sin \phi + \tau_{xy}(\cos^2 \phi \sin^2 \phi)$$

Kierunki główne i wartości główne naprężeń i odkształceń w stanie płaskim

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

$$\tan(2\phi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\begin{cases} \cos(2\phi)(\sigma_x - \sigma_y) > 0 \Rightarrow \phi = \phi_1 \\ \cos(2\phi)(\sigma_x - \sigma_y) < 0 \Rightarrow \phi = \phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(2\phi)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) > 0 \Rightarrow \phi = \phi_1 \\ \cos(2\phi)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) < 0 \Rightarrow \phi = \phi_2 \end{cases}$$